

MODELING OF SOIL STRAIN

Summary

The effect of punctual deformation on soil tension was analysed. The conditions of deformation destruction at optional durability e. g. of share or chisel were determined.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМАТОРА С ПОЧВОЙ

Резюме

В статье представлено взаимодействие точечного деформатора с почвой. Проведено анализ его поля напряжений и скорости изменения значений функции этих напряжений.

1. Введение

Задача статики о количественной оценке напряжений в случае приложения к почвенному массиву сосредоточенной нагрузки была впервые поставлена и решена Ж. Буссинеском [1].

В частности, им получено уравнение, устанавливающее зависимость радиальных напряжений σ_R от величины приложенной силы F , расстояния R до точки приложения нагрузки и угла β отклонения от направления действия силы:

$$\sigma_R = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{\pi \cdot R^2} \cos \beta \quad (1)$$

Из уравнения (1) следует, что радиальные напряжения обратно пропорциональны квадрату расстояния до точки приложения нагружающей силы F и прямо пропорциональны косинусу угла отклонения от линии её действия. Эпюра радиальных напряжений в соответствии с уравнением (1) изображена на рисунке 1. Как видно из рисунка она имеет серповидную форму, изменяясь от нуля на оси Y до максимального (амплитудного) значения на оси X .

Богатый научно-теоретический и практический материал по данному направлению содержится в трудах В.П. Горячкина, В.А. Желиговского, М.Е. Мацепуро, А.Т. Вагина, Ю.В. Чигарева и ряда других учёных.

2. Материал и методы

Впишем в полуокружность R (рисунок 1) окружность радиуса $R/2$ и выберем два произвольных направления l_1 и l_2 под углом к оси X β_1 и β_2 соответственно. Лучи l_1 и l_2 пересекут полуокружность R в точках M и N , а вписанную окружность в точках M_1 и N_1 . Через полученные точки M_1 и N_1 проведем полуокружности из центра O радиусами R_1 и R_2 .

Определим радиальные напряжения на полученной схеме в направлении l_1 . Согласно формуле Буссинеска радиальное напряжение σ_{RM} в точке M будет равно $\sigma_{RM} = 3F \cos \beta_1 / (2\pi R^2)$,

а в точке M_1 $\sigma_{RM_1} = 3F \cos \beta_1 / (2\pi R_1^2)$.

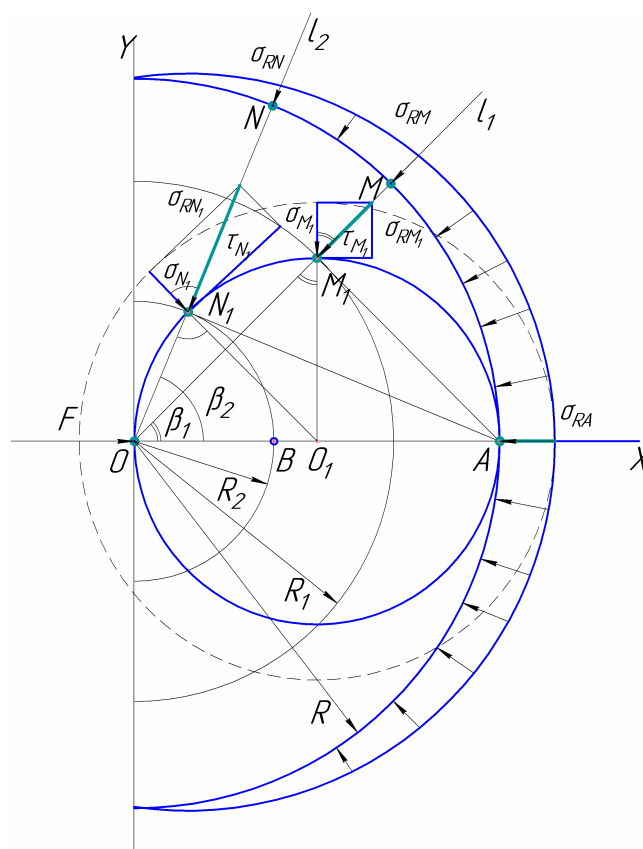


Рис. 1. Схема к анализу поля напряжений точечного источника

Fig. 1. Scheme to the analysis of stress field of point source

Радиусы R_1 и R связаны простым соотношением из ΔOM_1A : $R_1 / R = \cos \beta_1$, или $R_1 = R \cos \beta_1$. Тогда

$$\sigma_{RM_1} = 3F / (2\pi R^2 \cos \beta_1), \quad (2)$$

а проекция σ_{M_1} этого напряжения на нормаль к вписанной окружности вследствие равенства соответствующих углов (см. рисунок 1)

$$\sigma_{M_1} = 3F / (2\pi R^2) = \sigma_{RA}, \quad (3)$$

где σ_{RA} – радиальное напряжение в точке A (при $\cos \beta = 1$).

В направлении l_2 аналогично рассмотренному выше: $\sigma_{RN_1} = 3F \cos \beta_2 / (2\pi R_2^2)$, а так как $R_2 = R \cos \beta_2$, то

$$\sigma_{RN_1} = 3F / (2\pi R^2 \cos \beta_2), \quad (4)$$

а интересующая нас проекция этого напряжения на нормаль к вписанной окружности

$$\sigma_{N_1} = 3F / (2\pi R^2) = \sigma_{RA}. \quad (5)$$

Как видим, по любому направлению l нормальные составляющие радиального напряжения к вписанной окружности равны между собой и равны радиальному напряжению на оси X в точке A , т.е. эпюра нормальных напряжений σ для вписанной окружности принимаем форму кольца (см. рисунок 1).

Таким образом, в почвенном массиве перед точкой приложения силы F образуется окружность (в пространстве – сферическая область диаметром $D=R$), сжимаемая равными нормальными напряжениями, величина которых прямо пропорциональна силе F и обратно пропорциональна квадрату диаметра или площади поверхности сферы D

$$\sigma = 3F / (2\pi D^2). \quad (6)$$

С увеличением силы F и возрастанием напряжения в точке O диаметр окружности уменьшается. С позиций статики указанная область – самоуравновешенная система, разрушить которую теоретически невозможно: при любом значении силы F сфера будет сжиматься, оставаясь в равновесии.

Определим значения касательных напряжений на окружности D в точке M_1 . Учитывая равенство соответствующих углов $\tau_{M_1} = \sigma_{RM_1} \cdot \sin \beta_1$ или, подставляя значение σ_{RM_1} по выражению (2), получим

$$\tau_{M_1} = 3F \operatorname{tg} \beta_1 / (2\pi R^2). \quad (7)$$

В точке N_1 касательные напряжения будут

$$\tau_{N_1} = 3F \operatorname{tg} \beta_2 / (2\pi R^2), \quad (8)$$

а в общем виде, с учетом формулы (6), изменение касательных напряжений на окружности D определится выражением

$$\tau = \sigma \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (9)$$

Следовательно, касательные напряжения вдоль окружности изменяются от нуля на направлении действия силы X , до бесконечности на направлении, перпендикулярном силе F (ось Y). Отсюда следует, что вблизи точки O , вследствие значительных касательных напряжений, создаются условия для разрушения деформатора любой прочности. Практически, остро-заточенный лемех или долото активно затупляются именно в начальный период работы, пока лезвие не затупится настолько, что действие указанных выше касательных напряжений сместится в зону налипающей перед ним почвы, т.е. в саму область D . При этом скорость затупления снижается и некоторое время параметры рабочего органа сохраняют относительно стабильное значение (период нормальной эксплуатации).

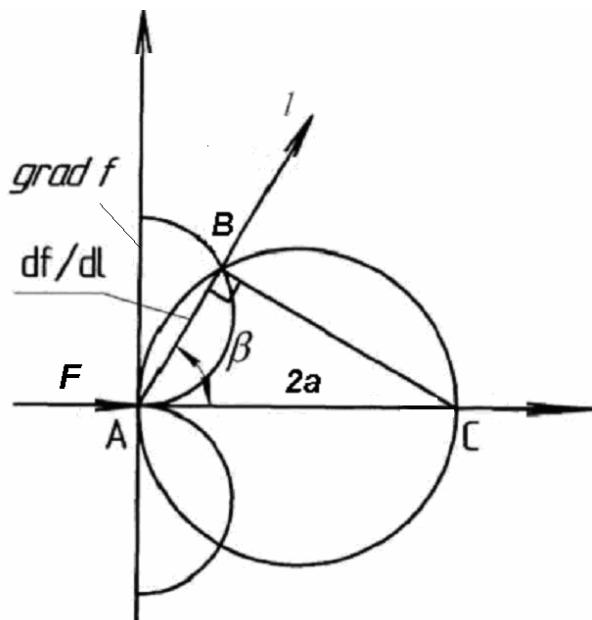


Рис. 2. Производная по направлению и градиент функции касательных напряжений

Fig. 2. Directional derivative and gradient of a function of shearing stresses

Анализируя напряженную область, отметим ещё одно свойство радиальных по отношению к точке O напряжений: их проекция на ось X есть величина постоянная, равная нормальным напряжениям $\sigma = \sigma_{RA}$. Действительно, с учетом выражений (2), (4):

$$\sigma_x = \sigma_{RM_1} \cdot \cos \beta_1 = \sigma_{RN_1} \cdot \cos \beta_2 = \sigma = 3F / (2\pi D^2). \quad (10)$$

Окружность D смещена относительно начала координат на величину $2a = D$. Уравнение данной окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = 2ax, \quad (11)$$

откуда

$$y = \sqrt{2ax - x^2} \quad \text{или} \quad f(x) = \sqrt{2ax - x^2}. \quad (12)$$

В полярной системе координат для $x = \rho \cos \beta$ получим

$$f(x) = \pm \sqrt{2a\rho \cos \beta - \rho^2 \cos^2 \beta}. \quad (13)$$

Из $\triangle ABC$ (рисунок 2) $2a = \frac{\rho}{\cos \beta} \Rightarrow \rho = 2a \cos \beta$. Подставив

значение ρ в формулу (13), получим

$$f(x) = \pm \sqrt{\rho^2 - \rho^2 \cos^2 \beta} = \pm \rho \cdot \sin \beta. \quad (14)$$

Известно, что производной $\frac{df}{dl}$ функции $f(X)$ в точке

A по направлению l называется предел в точке A отношения приращения функции на l к расстоянию ρ (A, X)

$$\frac{df}{dl} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(X) - f(A)}{\rho(A, X)}. \quad (15)$$

Для нашего случая производная функции по направлению примет вид

$$\frac{df}{dl} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\rho \cos \beta, \rho \sin \beta)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} (\pm \frac{\rho \sin \beta}{\rho}) = \pm \sin \beta. \quad (16)$$

Знак \pm в выражении (16) определяет положение ветвей синусоиды в 1 и 4 четвертях координатной плоскости XOY (рисунок 2).

Физический смысл производной по направлению заключён в том, что она показывает скорость изменения значений функции напряжений в направлении указанного вектора l , а градиент функции f есть вектор, указывающий направление в котором эта скорость изменения наибольшая.

По определению градиентом функции f в точке A называется вектор, проекции которого на координатные оси равны соответствующим производным функции $f(X)$ в точке A . Также известно, что производная по направлению $\frac{df}{dl}$ есть скалярное произведение градиента на единичный вектор направления l . Следовательно, производная по направлению l равна проекции градиента на это направление:

$$\frac{df}{dl} = \text{grad}f \cdot l = |\text{grad}f| \cdot \cos(90 - \beta) = |\text{grad}f| \cdot \sin \beta. \quad (17)$$

С учётом формулы (16) получим:

$$|\text{grad}f| \cdot \sin \beta = \pm \sin \beta, \quad (18)$$

Откуда

$$\text{grad}f = \pm 1. \quad (19)$$

3. Заключение

Как видим, производная по направлению является гармонической непрерывной функцией. Она определяет переменное значение параметров участвующих в процессе передачи энергии. А градиент – постоянная величина не зависящая от параметров окружности напряжений.

4. Литература

- [1] Farrell DA, Greacen EL, Larson WE (1967). The effect of water content on axial strain in a loam under tension and compression. Soil Sci Soc Am Proc 31: 445-450.
- [2] Горячкин В.П. Собрание сочинений. В. 3 т. Изд. 2-е, т. 2, М., «Колос», 1968. 455 с.
- [3] Желиговский В. А. Элементы теории почвообрабатывающих машин и механической технологии сельскохозяйственных материалов. Труды Грузинского сельскохозяйственного института. Тбилиси, 1960. 145 с.
- [4] Вагин А.Т. К вопросу взаимодействия клина с почвой. Обоснование основных параметров агрегатов для послойного внесения удобрений в почву. – В кн.: Вопросы земледельческой механики. Т. 15. Минск, Госиздат БССР, 1965, С.4–142.
- [5] Чигарев Ю.В. Математические основы механики почв: Учеб. пособие / Ю.В. Чигарев, П.Н. Синкевич. – Мн.: УП «Технопринт», 2004. – 164 с.