Jerzy ZIELNICA
Politechnika Poznańska
Miłosz OLEJNICZAK
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Koninie
Jan SZCZEPANIAK
Przemysłowy Instytut Maszyn Rolniczych w Poznaniu

SELECTED PROBLEMS OF PLASTICITY THEORY IN APPLICATION TO THE FINITE ELEMENT OF A THIN-WALLED BAR

Summary

The paper presents the application of the theory of plasticity used to model and engineering analysis of a thin walled bar element by means of the finite element method. The relations are presented, especially those that concern stress-hardening phenomenon in the constitutive matrix of the elastic-plastic material model.

WYBRANE ZAGADNIENIA TEORII PLASTYCZNOŚCI W ZASTOSOWANIU DO ELEMENTU SKOŃCZONEGO PRĘTA CIENKOŚCIENNEGO

Streszczenie

W artykule przedstawiono wybrane zagadnienia teorii plastyczności w zastosowaniu do budowy pręta cienkościennego stosowanego do modelowania i prowadzenia analiz metodą elementów skończonych. Omówiono podstawowe związki fizyczne z uwzględnieniem wzmocnienia plastycznego w macierzy konstytutywnej modelu sprężysto-plastycznego.

Wprowadzenie

W mechanice ciała stałego przy opisie złożonych stanów naprężeń w zakresie sprężysto-plastycznym posługujemy się dwoma podstawowymi teoriami plastyczności, a mianowicie: teorią deformacyjną (Nadaia-Hencky'ego) i teorią plastycznego płynięcia (Prandtla-Reussa) [1, 2, 3]. Deformacyjna teoria plastyczności powstała w pewnym sensie przez ekstrapolację związków konstytutywnych liniowej sprężystości na stany sprężysto-plastyczne, lecz wadą tej teorii, ograniczającą możliwości jej stosowania jest to, że może być ona wykorzystywana wyłącznie do prostych stanów obciążeń, tj. takich, gdzie zmiana wszystkich składowych tensora naprężenia jest proporcjonalna. Niedogodności tej jest pozbawiona teoria plastycznego płynięcia, która zostanie wykorzystana do zbudowania macierzy konstytutywnej opracowywanego elementu pręta cienkościennego.

Związki konstytutywne

W zależności od rodzaju deformacji, po pojawieniu się pierwszych odkształceń plastycznych w elemencie część materiału przechodzi w stan plastyczny, a część może pozostawać sprężysta. Jeżeli wystąpi przyrost składowych naprężeń, to wystąpią również odpowiednie przyrosty odkształceń, które można podzielić na część sprężystą i część plastyczną.

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p}. \tag{1}$$

Przyrost odkształceń sprężystych jest związany z przyrostem naprężeń za pomocą równania konstytutywnego liniowej sprężystości:

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{2}$$

gdzie: σ_{ij} *i* ε_{kl} są składowymi tensora naprężenia i odkształcenia, a A_{ijkl} jest tensorem stałych sprężystych, który dla materiału izotropowego ma postać:

$$A_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \mu\delta_{il}\delta_{jk}. \tag{3}$$

Tutaj λ i μ są stałymi Lamé, a δ_{ij} jest symbolem Kroneckera;

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dla } i = j \\ 0 \text{ dla } i \neq j \end{cases}, \tag{4}$$

Jeżeli przyrost odkształcenia sprężystego rozłożymy na część dewiatorową i część kulistą, wtedy

$$d\varepsilon_{ij}^{e} = \frac{d\sigma_{ij}}{2\mu} + \frac{1-2\nu}{E}\delta_{ij}d\sigma_{kk}. \tag{5}$$

Aby wyprowadzić zależności między składowymi odkształcenia plastycznego i przyrostami naprężenia, należy przyjąć dodatkowe założenia związane z zachowaniem się materiału. Przyjmiemy [1], że przyrost odkształcenia plastycznego jest proporcjonalny do przyrostu naprężenia, związanego z potencjałem plastycznym Q, tj.:

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{ij}}. \tag{6}$$

Tutaj $d\lambda$ jest pewnym współczynnikiem proporcjonalności zwanym „mnożnikiem plastycznym". Związek (6) jest nazywany prawem plastycznego płynięcia i opisuje proces plastycznego płynięcia po osiągnięciu warunku plastyczności. Potencjał plastyczny Q może być funkcją drugiego i trzeciego niezmiennika dewiatora naprężenia I_2' i I_3'. Związek $f \equiv Q$ (tutaj f jest funkcją plastycznego płynięcia) ma szczególne znaczenie w matematycznej teorii plastyczności. Dla tego przypadku można sformułować niektóre zasady wariacyjne i dowody jednoznaczności rozwiązań. Tożsamość $f \equiv Q$ jest ważna, ponieważ stwierdzono, że zarówno f, jak i Q są funkcjami niezmienników I_2' i I_3'. Założenie to prowadzi bezpośrednio do tzw. stowarzyszonego prawa płynięcia o postaci;

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda \frac{df}{\partial \sigma_{ij}} \quad (7)$$

Z prawa tego wynika, że $\partial f / \partial \sigma_{ij}$ jest wektorem w kierunku normalnym do powierzchni plastycznego płynięcia w rozważanym punkcie tej powierzchni, jak na rys. 1.

Składowe przyrostu odkształcenia plastycznego są potrzebne do realizacji sumowania wektorowego w przestrzeni n – wymiarowej, celem uzyskania wektora normalnego do powierzchni płynięcia. W przypadku szczególnym, gdy $f = I_2'$ mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \mathrm{I}_2'}{\partial \sigma_{\mathrm{ij}}} = \sigma_{ij}' \quad (8)$$

i związek (7) przyjmie postać:

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda \sigma_{ij}' \quad (9)$$

nazywaną stowarzyszonym prawem płynięcia Prandtla-Reussa. Należy jednak zwrócić uwagę, że tak sformułowany związek konstytutywny daje zadowalające wyniki potwierdzone doświadczalnie dla materiałów ciągliwych, w tym metali i ich stopów, lecz brak potwierdzenia o przydatności tej teorii dla materiałów kruchych [1].

Wykorzystując zależności (1), (5) i (6) otrzymamy podstawowy związek konstytutywny dla materiału o właściwościach sprężysto-plastycznych.

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{d\sigma_{ij}'}{2\mu} + \frac{1-2\vartheta}{E}\delta_{ij} d\sigma_{kk} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (10)$$

W zapisie tradycyjnym z uwzględnieniem warunku plastyczności H-M (Hubera-Misesa) zależność (10) przekształca się do następującego układu równań:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma_Y}{3G\dot{\varepsilon}_i^p}(\sigma_x - \sigma_m) + \sigma_x - \sigma_m = \frac{2}{3}\frac{\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_m^s}{\dot{\varepsilon}_i^p}\sigma_Y, \\
&\frac{\sigma_Y}{3G\dot{\varepsilon}_i^p}(\sigma_y - \sigma_m) + \sigma_y - \sigma_m = \frac{2}{3}\frac{\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_m^s}{\dot{\varepsilon}_i^p}\sigma_Y, \\
&\frac{\sigma_Y}{3G\dot{\varepsilon}_i^p}(\sigma_z - \sigma_m) + \sigma_z - \sigma_m = \frac{2}{3}\frac{\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_m^s}{\dot{\varepsilon}_i^p}\sigma_Y \qquad (11) \\
&\frac{\sigma_Y}{3G}\frac{\tau_{xy}}{\dot{\varepsilon}_i^p} + \tau_{xy} = \frac{\sigma_Y}{3}\frac{\dot{\chi}_{xy}}{\dot{\varepsilon}_i^p}, \\
&\frac{\sigma_Y}{3G}\frac{\tau_{yz}}{\dot{\varepsilon}_i^p} + \tau_{yz} = \frac{\sigma_Y}{3}\frac{\dot{\chi}_{yz}}{\dot{\varepsilon}_i^p}, \\
&\frac{\sigma_Y}{3G}\frac{\tau_{zx}}{\dot{\varepsilon}_i^p} + \tau_{zx} = \frac{\sigma_Y}{3}\frac{\dot{\chi}_{zx}}{\dot{\varepsilon}_i^p},
\end{aligned}$$

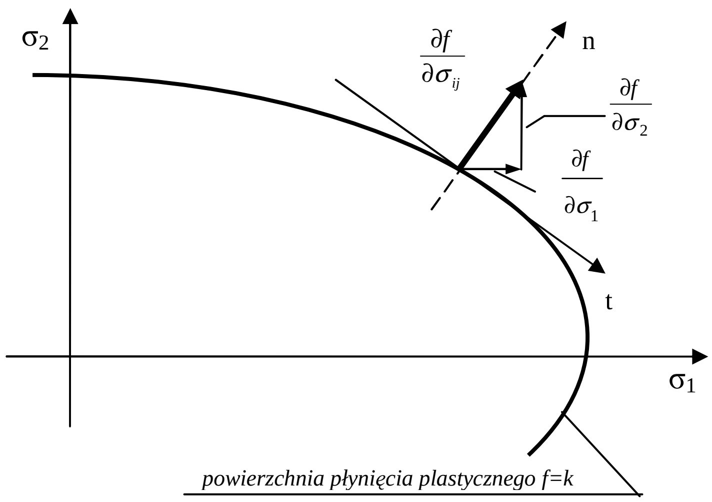
gdzie σ_Y jest granicą plastyczności przy prostym rozciąganiu. Do równań tych należy dołączyć prawo zmiany objętości.

Warunki plastyczności

Oprócz związków fizycznych teorii plastyczności należy dokonać wyboru odpowiedniego warunku uplastycznienia w złożonych stanach naprężeń. Warunek plastyczności określa poziom naprężeń, przy którym rozpoczyna się proces uplastycznienia w złożonych stanach naprężeń. Można go przyjąć w postaci

$$f(\sigma_{ij}) = k(\chi), \quad (12)$$

gdzie k jest parametrem materiałowym, który wyznaczamy doświadczalnie. Parametr ten może być funkcją pewnego parametru wzmocnienia χ, który omówiony zostanie w następnym podrozdziale. Z fizycznego punktu widzenia dowolny warunek uplastycznienia może być niezależny od położenia przyjętego układu współrzędnych i dlatego powinien być funkcją wyłącznie trzech niezmienników stanu naprężenia.



Rys. 1. Interpretacja geometryczna warunku prostopadłości w procesie płynięcia plastycznego
Fig. 1.

$$I_1 = \sigma_{ii}\,,$$
$$I_2 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij} \qquad (13)$$
$$I_3 = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}\,.$$

Badania doświadczalne, jakie przeprowadził Bridgeman [2] wykazały, że równomierne ciśnienie hydrostatyczne, związane z pierwszym niezmiennikiem I_1, nie ma wpływu na odkształcenia plastyczne, dlatego też funkcja plastycznego płynięcia f zależy jedynie od drugiego i trzeciego niezmiennika dewiatora naprężenia I_2' i I_3',

$$\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}\,,$$

czyli:

$$f(I_2', I_3') = k(\chi) \qquad (14)$$

Jak dotąd, opracowano wiele różnych warunków plastyczności, jedne dotyczą materiałów ciągliwych, a inne – kruchych. Dla metali najczęściej stosowany jest energetyczny warunek plastyczności Hubera-Misesa i warunek oparty o największe naprężenia ścinające, zwany warunkiem plastyczności Treski:

Warunek plastyczności Hubera-Misesa

M.T. Huber (1905) oraz R. von Mises (1913) dowiedli, że na uplastycznienie materiału główny wpływ ma energia związana z odkształceniem czysto postaciowym, która wyraża się przez drugi niezmiennik dewiatora naprężenia, tj.

$$\sqrt{I_2'} = k(\chi)\,, \qquad (15)$$

gdzie k jest pewną stałą materiałową wyznaczaną doświadczalnie. Drugi niezmiennik dewiatora naprężenia, wyrażony przez naprężenia główne i dowolne, ma postać

$$I_2' = \frac{1}{2}\sigma_{ij}'\sigma_{ij}' = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2+\sigma_3)^2 + (\sigma_3+\sigma_1)^2\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sigma_x'^{\,2} + \sigma_y'^{\,2} + \sigma_z'^{\,2}\right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\,, \qquad (16)$$

gdzie σ_1, σ_2, σ_3 są naprężeniami głównymi ogólnego stanu naprężeń.

Warunek plastyczności (15) można również przedstawić w postaci:

$$\overline{\sigma} = \sqrt{3}\sqrt{I_2'} = \sqrt{3}k \qquad (17)$$

gdzie:

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\sigma_{ij}'\sigma_{ij}'} \qquad (18)$$

Tutaj $\overline{\sigma}$ jest nazywane naprężeniem efektywnym, lub intensywnością naprężeń. Istnieją dwie różne interpretacje fizyczne warunku plastyczności Hubera-Misesa. Nadai (1937), jeden z współtwórców deformacyjnej teorii plastyczności, wprowadził tzw. ścinające naprężenie oktaedryczne τ_{oct}

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}I_2'} \qquad (19)$$

reprezentujące naprężenie tnące występujące na ściankach ośmiościanu foremnego, którego wierzchołki pokrywają się z kierunkami naprężeń głównych.

Początek uplastycznienia może więc być utożsamiany z osiągnięciem przez naprężenie τ_{oct} pewnej wartości krytycznej. W płaszczyźnie naprężeń głównych σ_1, σ_2 warunek plastyczności Hubera-Misesa odpowiada elipsie, której osie główne są nachylone pod kątem 45^o do osi głównych. Fizyczne wartość stałej k może być wyznaczona na podstawie prób wytrzymałościowych przy jednoosiowym rozciąganiu. W przypadku czystego ścinania $(\sigma_1 = -\sigma_2\,,\ \sigma_3 = 0)$ należy wykorzystać warunki (15) i (16), w których stała k musi być równa granicy plastyczności przy czystym ścinaniu, co odpowiada granicy plastyczności $\sqrt{3}k$ przy jednoosiowym rozciąganiu $(\sigma_2 = \sigma_3 = 0)$.

Warunek plastyczności Treski

Treska (1934) stwierdził, że o uplastycznieniu materiału decydują maksymalne naprężenia tnące τ_{max}. Jeżeli naprężenia główne uporządkujemy w taki sposób, że $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, wtedy plastyczne płynięcie rozpocznie się w momencie, gdy:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = Y(\chi) \qquad (20)$$

Tutaj Y jest pewnym parametrem materiałowym, który jest wyznaczany doświadczalnie i który również, jak w warunku plastyczności Hubera – Misesa, może być funkcją parametru wzmocnienia χ. Przy wzięciu pod uwagę wszystkich pozostałych ekstremalnych naprężeń tnących, np. $\sigma_2 - \sigma_1$, gdy $\sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1$, można wykazać, że ten warunek plastyczności może być w przestrzeni naprężeń głównych σ_1, σ_2, σ_3 reprezentowany przez powierzchnię nieskończenie długiego cylindra o podstawie sześciokąta foremnego, którego oś jest nachylona pod takimi samymi kątami do wszystkich osi głównych 1, 2 i 3. Gdy funkcja płynięcia plastycznego f zależy wyłącznie od I_2' i I_3', to można ją zapisać w postaci $f(\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 - \sigma_3)$ i wówczas w układzie współrzędnych $\sigma_1 - \sigma_3$; $\sigma_2 - \sigma_3$ wykres funkcji $f=k$ jest reprezentowany sześciokątem wpisanym w elipsę Hubera – Misesa [1].

Ogólnie wykazano, że dla zagadnień konserwatywnych [1, 3] powierzchnia plastyczności musi być wypukła.

Warunek plastyczności Druckera-Pragera

Ten warunek plastyczności jest pewną odmianą warunku Hubera – Misesa. W warunku tym uwzględniony został wpływ części kulistej tensora naprężenia na uplastycznienie materiału, przez uwzględnienie dodatkowego składnika o postaci:

$$\alpha I_1 + \sqrt{I_2'} = k'\,, \qquad (21)$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3+\sin\varphi)}, \; k^{'} = \frac{6c\cos\varphi}{\sqrt{3}(3+\sin\varphi)}, \qquad (22)$$

a φ jest kątem tarcia wewnętrznego.

Wzmocnienie plastyczne

Większość modeli ciał sprężysto-plastycznych stosowanych na przykład w zagadnieniach technologii przeróbki plastycznej nie uwzględnia wzmocnienia materiału (teoria Levy-Misesa). Większość problemów konstrukcyjnych uwzględniających teorię prętów cienkościennych wymaga jednak uwzględniania wzmocnienia materiału. Po osiągnięciu punktu na początkowej powierzchni plastycznego płynięcia dalszemu narastaniu wartości składowych tensora naprężenia może towarzyszyć zjawisko wzmocnienia (lub umocnienia) materiału, co wywołuje zmianę położenia powierzchni plastycznego płynięcia na kolejnych krokach odkształcenia. Jest rzeczą oczywistą, że materiał sprężysto-idealnie plastyczny ma stałą powierzchnię płynięcia. Materiał o właściwościach sprężysto-plastycznych może podlegać różnym prawom umocnienia, a mianowicie:

- izotropowemu (równomierne rozszerzanie się powierzchni plastyczności przy nieruchomym początku, jak na rys. 2),
- kinematycznemu, gdzie następuje ruch powierzchni płynięcia bez zmiany jej kształtu,
- wzmocnienie izotropowo-kinematyczne (rys. 3), gdzie może występować jednoczesne rozszerzanie się powierzchni płynięcia i przemieszczanie się środka tej powierzchni.

Wzmocnienie typu kinematycznego lub izotropowo-kinematyczne jest związane z występowaniem tzw. efektu Baushingera przy obciążeniach cyklicznych.

Stopniowe rozszerzanie się powierzchni płynięcia może być opisane przez związanie granicy plastyczności (lub naprężenia uplastyczniającego) k z odkształceniem plastycznym za pomocą parametru wzmocnienia χ . Można tego dokonać dwoma sposobami. Po pierwsze należy wysunąć tezę, że stopień umocnienia materiału jest wyłącznie funkcją całkowitej pracy odkształcenia plastycznego W_p, tj.:

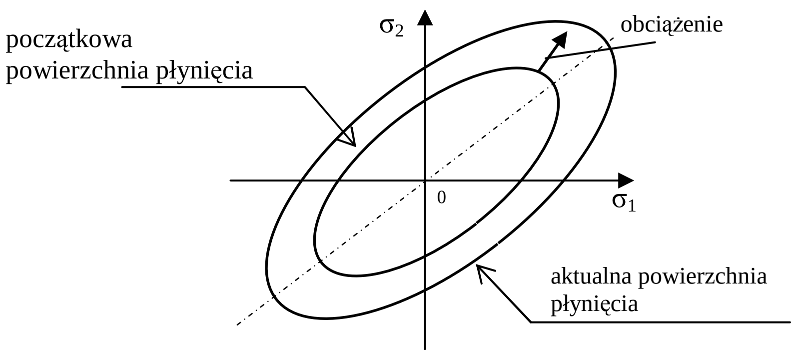
$$\chi = W_p, \qquad (23)$$

gdzie:

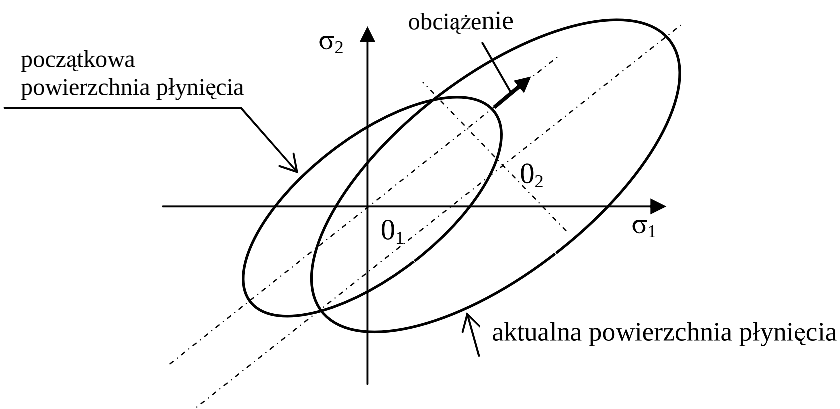
$$W_p = \int_v \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p . \qquad (24)$$

Tutaj $d\varepsilon_{ij}^p$ oznacza składowe odkształcenia plastycznego na każdym przyroście odkształcenia. Można również przypisać parametrowi χ miarę całkowitego odkształcenia plastycznego, nazywanego plastycznym odkształceniem efektywnym, lub intensywnością odkształcenia, zdefiniowanym jako:

$$d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} \qquad (25)$$



Rys. 2. Wzmocnienia izotropowe
Fig. 2.



Rys. 3. Wzmocnienie materiału izotropowo-kinematyczne
Fig. 3.

W następnym podrozdziale przedstawiona zostanie geometryczna interpretacja tego opisu parametru wzmocnienia na podstawie analizy procesu uplastyczniania w jednoosiowym stanie naprężeń. Dla tych przypadków, gdzie zakłada się iż plastyczne płynięcie jest niezależne od części kulistej tensora naprężenia, tj. $d\varepsilon_{ii}^{p} = 0$, wynika, że $d\varepsilon_{ij}^{'p} = d\varepsilon_{ii}^{p}$. Dlatego związek (25) można przedstawić w postaci:

$$d\bar{\varepsilon}^{p} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{d\varepsilon_{ij}^{'p} d\varepsilon_{ij}^{'p}} \tag{26}$$

a parametr wzmocnienia χ zostaje zdefiniowany jako

$$\chi = \bar{\varepsilon}^{p} \tag{27}$$

Tutaj $\bar{\varepsilon}^{p}$ jest wynikiem całkowania przyrostu $d\bar{\varepsilon}^{p}$ wzdłuż całej ścieżki odkształcenia. Własność ta nazywana jest umocnieniem. W dalszym ciągu przyjmować będziemy wyłącznie wzmocnienie izotropowe.

Stany naprężeń, dla których *f*= *k*, reprezentują stany plastyczne. Jeżeli *f*<*k*, to następuje odciążenie sprężyste. W stanie plastycznym, dla którego *f*=*k*, przyrost funkcji płynięcia wywołany przyrostem składowych tensora naprężenia wynosi

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \tag{28}$$

W przypadku, gdy:

df<0, występuje sprężyste odciążenie (opisane np. uogólnionym prawem Hooke'a) i naprężenia wracają do wewnątrz powierzchni płynięcia,

df=0, oznacza proces neutralny (własności materiału odpowiadają materiałowi idealnie plastycznemu), gdzie punkt w przestrzeni naprężeń pozostaje na powierzchni płynięcia,

df>0, oznacza obciążenie plastyczne (własności plastyczne dla materiału umacniającego się), przy czym punkt w przestrzeni naprężeń pozostaje cały czas na rozszerzającej się powierzchni płynięcia plastycznego.

Przedstawione powyżej podstawowe związki teorii plastycznego płynięcia i warunki plastyczności zostaną wykorzystane do opisu macierzowego, powszechnie stosowanego w metodzie elementów skończonych. W szczególności przedyskutować należy alternatywną postać warunków plastyczności dla celów obliczeń numerycznych, gdzie funkcja plastycznego płynięcia *f* jest wyrażona przez niezmienniki stanu naprężenia.

Literatura

[1] Hill R., The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford University Press, 1950

[2] Bridgeman P. W.: Studies in Large Plastic Flow and Fracture, Mc Graw- Hill, New York, 1952

[3] Hoffman O., Sachs G.: Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers, Mc Graw-Hill, 1953

[4] Bushnell D.: Plastic Bucling of Various Shells. Transactions of ASME, Vol.104, 1982, p. 51-72

[5] Zielnica J.: Analiza sprężysto-plastycznych układów dwuwymiarowych metodą elementów skończonych w zakresie dużych przemieszczeń, ZNPP, Mechanika, 1998, s. 165-185

[6] Zielnica J.: Stateczność powłok sprężysto-plastycznych, WPP, Poznań 2001, s. 258

[7] Olejniczak M.; Szczepaniak J.: Metoda elementów skończonych w zagadnieniach optymalizacji i projektowania konstrukcji nośnych maszyn roboczych. Materiały z IX Krajowej Konferencji Wytrzymałości i Badania Materiałów. Zakopane, wrzesień 2000.